Géométrie projective réelle

Luis Peñaranda

1 mars 2010

1 Le plan projectif réel

1.1 Points idéaux

Figure 1 – les rails sont parallèles

La géométrie projective a son origine dans le développement des règles géométriques du dessin en perspective. Une projection centrale fait correspondre droites qui ne sont pas parallèles au plan de l'image à des droites qui s'intersectent (voir fig. 1). Cet exemple montre qu'une géométrie utilisée pour étudier des projections

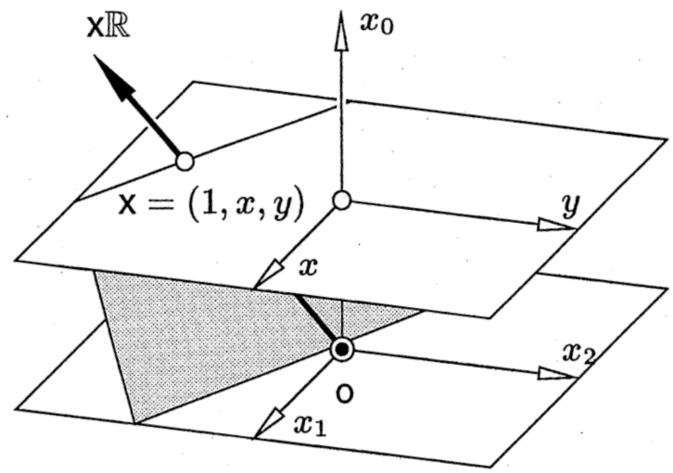


FIGURE 2 – coordonnées homogènes

centrales doit regarder le parallélisme comme une forme d'intersection. Cette idée est capturée par le concept d'*extension projective* de l'espace euclidien.

On commence par discuter l'extension projective du plan euclidien. On ajoute un *point idéal* ou *point à l'infini* à chaque droite L, d'une manière telle que les droites parallèles partage le même point. Cela veut dire que deux droites sont parallèles si et seulement si elles s'intersectent à l'infini (toutes les autres droites s'intersectent en un point fini). La *droite idéale*, notée ω, consiste en tous les points idéaux. Dans les figures, on indique qu'un point est le point idéal d'une droite L avec une flèche nommée L_ω ou L_u. Une droite contient exactement *un* point idéal (cela fait partie de la définition de point à l'infini). Ce point peut être approché en parcourant la droite en n'importe quelle direction.

1.2 Coordonnées homogènes

On introduit ensuite des coordonnées qui décrivent tant des points normaux que des points idéaux. On choisit un système cartésien dans le plan euclidien E^2. Ses points sont représentés par vecteurs coordonnés $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. L'espace linéaire $\mathbb{R}^3$ est sensé d'avoir coordonnées x_0, x_1, x_2. On plonge le plan euclidien dans $\mathbb{R}^3$ avec l'application $(x, y) \mapsto (1, x, y)$. Alors, E^2 est identifié avec le plan $x_0 = 1$ de $\mathbb{R}^3$ (voir fig. 2).

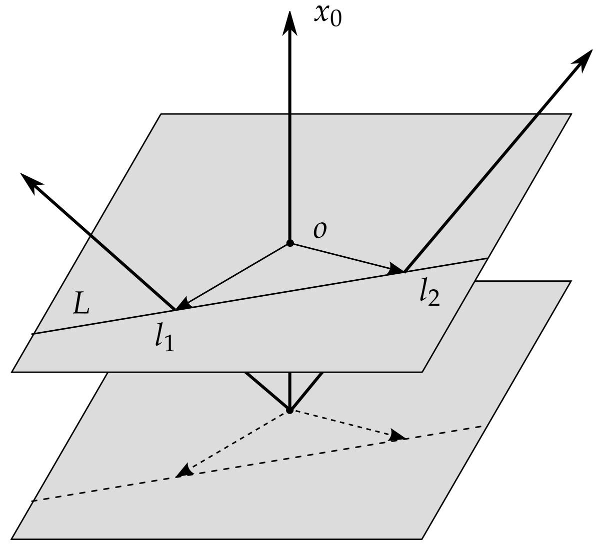


FIGURE 3 – Droites euclidiennes et points idéaux

L'espace linéaire unidimensionnel engendré par $\mathsf{x} = (1, x, y)$ consiste aux vecteurs $\mathsf{x}\mathbb{R} = (\lambda, \lambda x, \lambda y), \lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \neq 0$, une triplet de coordonnées définit uniquement le sous espace $x\mathbb{R}$ et son point régulier de E^2. Alors, à chaque point avec deux coordonnées de E^2 on assigne trois coordonnées, qui sont uniques (sauf facteur constant). On appelle ces trois coordonnées *coordonnées cartésiennes homogènes*. Le symbol $\mathsf{x}\mathbb{R}$ dénote le point ainsi que le symbol $\mathbf{x}$, si $\mathsf{x} = \lambda(1, x, y)$ et $\mathbf{x} = (x, y)$. Pour mieux dénoter l'homogénéité, on peut utiliser la notation $(x_0 : x_1 : x_2)$ pour $(x_0, x_1, x_2)\mathbb{R}$. Les coordonnées originales peuvent être récupérées à partir des coordonnées homogènes en faisant

$$\mathsf{x}\mathbb{R} \hat{=} (x_0 : x_1 : x_2) \hat{=} (\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}) \hat{=} \mathbf{x}, \quad (x_0 \neq 0) \tag{1}$$

Si on utilisait notation matricielle, on verrait $\mathbf{x}$ (ou x) comme un vecteur colonne. On note $\mathbf{x} = (x, y)$ par simplicité.

1.3 Représentation de droites euclidiennes et points idéaux

Considérons une droite L parallèle au vecteur (l_1, l_2) dans le plan euclidien (voir fig. 3). Ses points $\mathbf{x}$ sont représentés par sous espaces unidimensionnels $\mathsf{x}\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^3$. Ils sont contenus dans un sous espace bidimensionnel de $\mathbb{R}^3$. Néanmoins, un sous espace unidimensionnel manque : celui engendré par $(0, l_1, l_2)$, est parallèle à L et est contenu dans le plan $x_0 = 0$. Si L' est parallèle à L, le sous espace unidimensionnel parallèle à L' est trivialement le même que pour L.

Inversement, tous les sous espaces unidimensionnels de $\mathbb{R}^3$ (sauf ceux dans $x_0 = 0$) représentent un point régulier de E^2. Un sous espace unidimensionnel en $x_0 = 0$ est contenu dans deux sous espaces bidimensionnels qui correspondent à une famille de droites parallèles. Ce fait montre comment représenter des points idéaux : les candidats sont les sous espaces unidimensionnels “manquants” du paragraphe précédent.

On a établi alors une relation injective entre des sous espaces linéaires unidimensionnels de $\mathbb{R}^3$ et des points (réguliers et idéaux) du plan projectif étendu. On appelle ce plan étendu *plan projectif réel* ; il est noté P^2.

Les droites de P^2 sont représentées par des sous espaces bidimensionnels linéaires de $\mathbb{R}^3$. Tout, sauf le sous espace $x_0 = 0$, détermine une droite euclidienne. $x_0 = 0$ correspond à la droite idéale ω qui contient tous les points idéaux.

1.4 Coordonnées homogènes et relation d'incidence

Si un point $p\mathbb{R}$ est contenu dans une droite L, on appelle ces deux objets *incidents*. Le pair $p\mathbb{R}, L$ est donc un membre de la *relation d'incidence*. Une droite L engendrée par les points $a\mathbb{R}$ et $b\mathbb{R}$ peut être paramétrée

$$x\mathbb{R} = (\lambda_0 a + \lambda_1 b)\mathbb{R}, \quad (\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

On peut aussi écrire ce sous espace bidimensionnel comme la solution d'une équation linéaire homogène

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0 \tag{3}$$

Les coefficients $(u_0, u_1, u_2) = \mathsf{u}$ sont uniques (sauf facteur constant) et sont appelés *coordonnées homogènes* de L. Pour distinguer les coordonnées de droites et les coordonnées de points, on écrit $L = \mathbb{R}(u_0, u_1, u_2) = \mathbb{R}\mathsf{u}$, avec le symbole $\mathbb{R}$ à gauche du vecteur.

On donne aussi une interprétation euclidienne de l'équation 3 : si on introduit le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$, l'équation 3 voudrait dire que les vecteurs (u_0, u_1, u_2) et (x_0, x_1, x_2) sont orthogonaux. Alors,

$$\mathsf{u} \cdot \mathsf{x} = 0 \tag{4}$$

Ceci est la condition d'*incidence* d'une droite $\mathbb{R}\mathsf{u}$ et un point $\mathsf{x}\mathbb{R}$.

Pour calculer la droite $\mathbb{R}\mathsf{u}$ incidente avec deux points $\mathsf{a}\mathbb{R}$ et $\mathsf{b}\mathbb{R}$, il faut déterminer u tel qu'il est orthogonal à $\mathsf{a}\mathbb{R}$ et $\mathsf{b}\mathbb{R}$:

$$\mathsf{u} = \mathsf{a} \times \mathsf{b} \tag{5}$$

Inversement, le point $\mathsf{a}\mathbb{R}$ incident avec les droites $\mathbb{R}\mathsf{u}$ et $\mathbb{R}\mathsf{v}$ est calculé comme

$$\mathsf{a} = \mathsf{u} \times \mathsf{v} \tag{6}$$

1.5 La structure d'incidence du plan projectif

La structure d'incidence du plan projectif est très simple : deux points différents $A_1 = \mathsf{a}_1\mathbb{R}$ et $A_2 = \mathsf{a}_2\mathbb{R}$ sont incidents avec exactement une droite $L = \mathbb{R}\mathsf{u}$ (voir éq. 5). C'est à dire, $L = A_1 \vee A_2$.

Deux droites différentes L_1 et L_2 sont incidentes avec exactement un point P : $P = L_1 \cap L_2$.

Notez la différence avec la situation dans le plan euclidien, où deux droites peuvent ne pas s'intersecter (parallèles). On peut dénoter l'incidence d'un point P et une droite L avec le symbole $L\mathbf{I}P$, pour mettre l'accent sur la symétrie de cette relation. Mais il suffit avec $P \in L$.

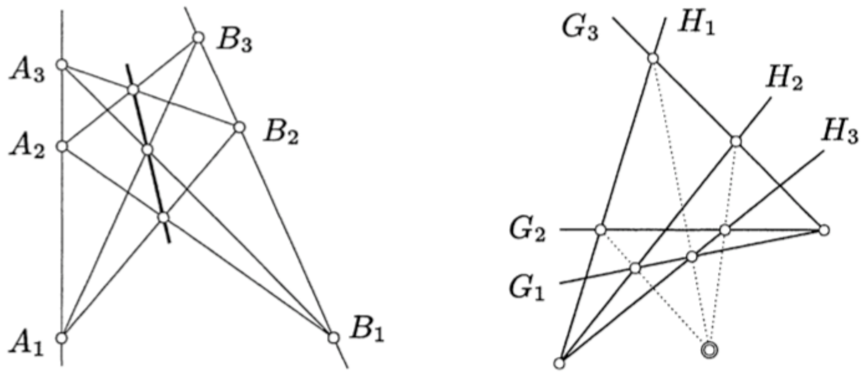
On dit que les points incidents avec la même droite sont *colinéaires*, et les droites incidentes avec le même point sont *concurrentes*. Si $\mathsf{a}_1\mathbb{R}$, $\mathsf{a}_2\mathbb{R}$ et $\mathsf{a}_3\mathbb{R}$ sont incidents avec la droite $\mathbb{R}\mathsf{u}$, alors $\mathsf{a}_1 \cdot \mathsf{u} = \mathsf{a}_2 \cdot \mathsf{u} = \mathsf{a}_3 \cdot \mathsf{u} = 0$, et $\det(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \mathsf{a}_3) = 0$. Inversement, si ce déterminant est zéro, les vecteurs a_1, a_2 et a_3) sont contenus dans un sous espace bidimensionnel, et donc $\mathsf{a}_1\mathbb{R}$, $\mathsf{a}_2\mathbb{R}$ et $\mathsf{a}_3\mathbb{R}$ sont des points colinéaires. On a montré que

$$\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \mathsf{a}_3 \text{ collinéaires} \Leftrightarrow \det(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \mathsf{a}_3) = 0 \tag{7}$$

1.6 Dualité dans le plan projectif

On conclut de l'observation de l'équation 4 que la condition d'incidence est complètement symétrique : les coordonnées des points et des droites peuvent être échangées sans affecter la condition. Ceci a une conséquence très importante :

Définition 1. *Les objets géométriques "droite" et "point" sont duales dans le plan projectif. Si dans une affirmation invoquant droites et points, les occurrences de chaque objet sont remplacées par son dual, cette affirmation est appelée la dual de l'originale.*



(a) théorème de Pappus (b) théorème de Brianchon

FIGURE 4 – Les théorèmes de Pappus et de Brianchon sont duales.

On a défini que les points sont *colinéaires* s'ils sont contenus dans la même droite, et que les droites sont *concurrentes* si elles contiennent le même point. Si on voulait convertir une affirmation contenant les mots *colinéaire* et *concurrent* en sa version duale, on a qu'à échanger les occurrences de ces mots.

Théorème 2. (principe de dualité dans le plan projectif) *Si une affirmation sur des objets dans le plan projectif emploie seulement des mots "points", "droites" et "incidence" est vraie, son dual est aussi vrai, et vice versa.*

Démonstration. La preuve de l'affirmation duale est obtenue en échangeant les mots "point" et "droite" dans la preuve originale. Les équations 4, 5 et 6 montrent alors que l'affirmation duale est montré. [1] □

Normalement, une affirmation duale est différent de son originale. Sinon, l'affirmation s'appelle *auto-duale*. Les objets géométriques peuvent être dualisés en dualisant la définition, qui est une affirmation.

Exemple 3. *Un* rang de points *(les points incidents avec une droite) est dual à un* faisceau de droites *(les droites concurrentes dans un point). La droite engendrée par deux points est duale au point d'intersection de deux droites. Un* élément droite

1. Ce théorème est en fait un méta-théorème : un théorème sur des autres. Sa preuve est un brouillon d'une méta-preuve. On ne va pas entrer dans les détails car ceci n'est pas un cours de logique.

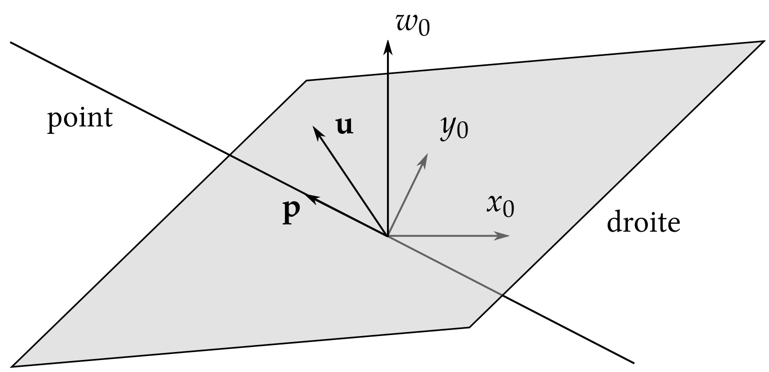


FIGURE 5 – Espace de rayons

(une droite avec un point à l'intérieur) est un objet géométrique auto-dual. Voir la fig. 4.

Exemple 4. *L'affirmation suivante peut être dualisée. On suppose A_1, A_2 et A_3 colinéaires, et B_1, B_2 et B_3 aussi colinéaires. Alors, les trois points $(A_1 \vee B_2) \cap (A_2 \vee B_1)$, $(A_2 \vee B_3) \cap (A_3 \vee B_2)$ et $(A_3 \vee B_1) \cap (A_1 \vee B_3)$ sont colinéaires, comme dans la figure 4(a).*

L'affirmation duale est la suivante. On suppose G_1, G_2 et G_3 concurrentes, et H_1, H_2 et H_3 aussi concurrentes. Alors, les trois droites $(G_1 \cap H_2) \vee (G_2 \cap H_1)$, $(G_2 \cap H_3) \vee (G_3 \cap H_2)$ et $(G_3 \cap H_1) \vee (G_1 \cap H_3)$ sont concurrentes, comme dans la figure 4(b).

1.7 Modèles du plan projectif

Les modèles du plan projectif sont les différentes manières de visualiser le plan projectif.

Coordonnées homogènes C'est le modèle sur lequel on a basé les explications précédentes. Ce modèle est le plus important des quatre, et le plus utilisé en la littérature.

Espace de rayons On a vu que, en passant de euclidien en projectif, un point de $\mathbb{R}^2$ devient un ensemble de points de $\mathbb{R}^3$. Chaque point de cet ensemble est lié aux autres à travers d'un facteur non zéro. Alors, chaque point $\mathbf{p} \in P^2$ peut

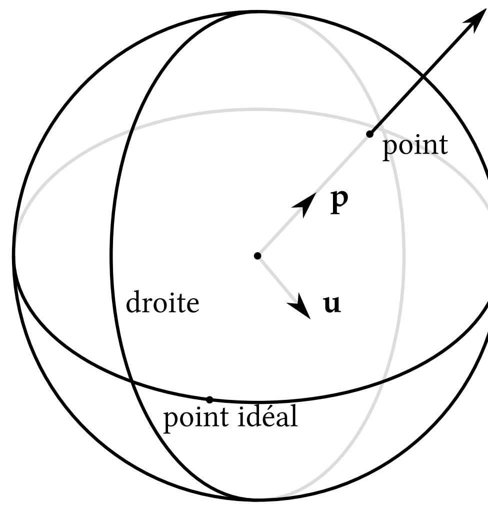


FIGURE 6 – La sphère unitaire

être vu comme une "droite" en $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine et le point $\mathbf{p}$. Cet espace tridimensionnel est appelé *espace de rayons*. De cet façon, une droite $\mathbf{u} \in P^2$ peut être vue comme un plan passant par l'origine et perpendiculaire à $\mathbf{u}$.

La sphère unitaire Comme les coordonnées de P^2 ne sont pas affectées par la multiplication scalaire, P^2 est bidimensionnel, même si ses points contiennent trois coordonnées. En fait, il est (localement) topologiquement équivalent à une sphère. Chaque point $\mathbf{p} \in P^2$, représenté comme une droite dans l'espace de rayons, peut être projeté sur la sphère unitaire. Donc, les points du plan projectif peuvent être vus comme des points sur la sphère unitaire. Également, les plans qui représentent des droites dans l'espace de rayons intersectent la sphère en cercles. Alors, les droites sont visualisées comme des cercles perpendiculaires à $\mathbf{u}$. La droite idéale sera alors l'équateur de la sphère, et les points idéaux seront sur ce cercle.

Plan affine augmenté Si on projette la sphère unitaire sur le plan $w_0 = 1$, chaque point (x_0, y_0, w_0) sur la sphère est projeté au point $(\frac{x_0}{w_0}, \frac{y_0}{w_0}, 1)$. Également, les droites se projettent comme l'intersection du plan $w_0 = 1$ avec le "plan" qui représente la droite. Les points idéaux sont projetés comme des points à l'infini. La droite idéale est projetée comme une droite à l'infini. C'est important remarquer qu'on est revenu à une représentation où les points sont des points et les droites

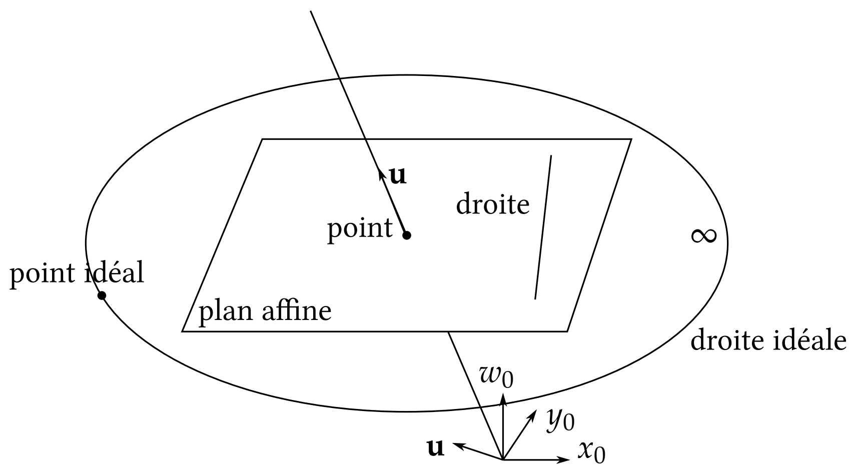


FIGURE 7 – Plan affine augmenté

sont des droites. Ceci motive la définition suivante :

Définition 5. *Le plan projectif P^2 est le plan affine augmenté par une droite idéale et un ensemble de points idéaux, un pour chaque direction, où la droite idéale et les points idéaux ne peuvent pas être distingués des points et droites réguliers.*

Le plan affine contient les mêmes points que le plan euclidien, mais la différence est que le plan affine permet plus de transformations non rigides.

Autres modèles On pourrait voir le plan projectif de plusieurs manières, qui peuvent servir à visualiser des autres propriétés du plan projectif. Comme premier exemple, on pourrait prendre l'hémisphère nord de la sphère unitaire, y compris l'équateur. Tous les points antipodaux du modèle de la sphère unitaire seront représentés maintenant au moins par un point de l'hémisphère. On colle maintenant l'équateur, d'une façon telle d'unir les points antipodaux. Cette construction est aussi un modèle du plan projectif.

Une autre méthode consisterait à prendre une bande de Möbius et un disque, et les coller sur ses bords. Sans entrer dans les détails, on mentionne que ceci est un modèle du plan projectif, et le premier dessin d'un plongement de P^2 dans $\mathbb{R}^3$ est la surface de Boy (figure 8).

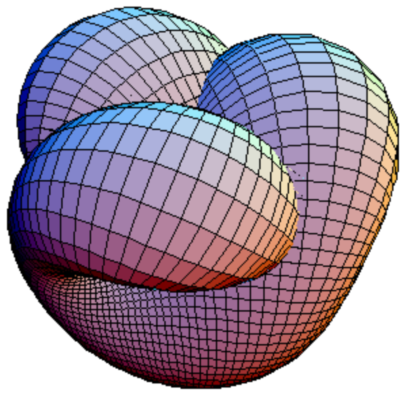


FIGURE 8 – Surface de Boy

2 Espace projectif n-dimensionnel

La construction des espaces projectifs n-dimensionnels P^n est complètement analogue à celle de P^2. On augmente le n-espace euclidien avec des point idéaux, un par chaque classe de droites parallèles, et regroupe les points idéaux dans l'*hyperplan* idéal, nommé ω. On définit une correspondance entre les sous espaces unidimensionnels de $\mathbb{R}^{n+1}$ et les points de P^n.

Définition 6. *On suppose les points $\mathbb{R}^{n+1}$ ayant coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$. L'ensemble des espace unidimensionnels de $\mathbb{R}^{n+1}$ s'appelle* espace projectif n-dimensionnel *P^n. On plonge l'espace euclidien n-dimensionnel E^n dans P^n avec $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1, x_1, \ldots, x_n)$. Si $x_0 = 0$, le point $(x_0, \ldots, x_n)$ s'appelle point idéal.*

On dénote le point $(x_0, \ldots, x_n)\mathbb{R} = \mathrm{x}\mathbb{R}$ aussi avec le symbole $(x_0, \ldots, x_n)$. Si $\mathrm{x}\mathbb{R}$ est un point régulier (c'est à dire, si $x_0 \neq 0$), ses coordonnées dans E^n sont récupérées par :

$$(x_0, \ldots, x_n)\mathbb{R} \in P^n \Leftrightarrow (\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) \in E^n, \quad (x_0 \neq 0) \tag{8}$$

Si une droite de E^n est parallèle au vecteur $(l_1, \ldots, l_n)\mathbb{R}$. Les points idéaux sont contenus dans l'*hyperplan idéal*, qui a par équation $x_0 = 0$. Le vecteur de coordonnées x du point $\mathrm{x}\mathbb{R}$ est appelé son *vecteur de coordonnées homogènes*. La correspondance entre des sous espaces unidimensionnels et points est une des plus importantes connexions entre l'algèbre et la géométrie.

Si on voudrait distinguer ce modèle de P^n des autres, on l'appellera *espace réel projectif de* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Si on répète la construction de l'espace projectif n-dimensionnel en remplaçant les coordonnées réelles par des nombres complexes, on obtiendra ce qu'on appelle l'*espace projectif complexe* $\mathbb{C}P^n$. En pratique, presque tout ce qui peut être calculé linéairement, est valable pour les deux espaces projectifs, le réel et le complexe. L'étude des espaces projectifs complexes ne fait pas partie de cette introduction.

2.1 Sous espaces projectifs

Définition 7. *Un sous espace linéaire $(k+1)$-dimensionnel U de $\mathbb{R}^{n+1}$ définit un sous espace projectif k-dimensionnel, qui consiste en tous les points $\mathsf{x}\mathbb{R}$ avec $\mathsf{x} \in U$.*

Le sous espace zéro-dimensionnel de $\mathbb{R}^{n+1}$ correspond à l'ensemble vide (il n'y a pas de points contenus dans le sous espace zéro). Il est lui assignée la dimension $k = -1$. Les points $\mathsf{x}\mathbb{R}$ sont des sous espaces projectifs zéro-dimensionnels. Si $k = 1$, le sous espace projectif est appelé *droite*, si $k = 2$ *plan* et si $k = n-1$ *hyperplan*. Le seul sous espace projectif n-dimensionnel est P^n lui même.

Définition 8. *Les points $P_0 = \mathsf{p}_0\mathbb{R}, \ldots, P_k = \mathsf{p}_k\mathbb{R}$ de P^n sont projectivement indépendants si et seulement si les vecteurs $\mathsf{p}_0, \ldots, \mathsf{p}_k$ sont linéairement indépendants.*

Tout sous espace projectif k-dimensionnel est un sous espace projectif k-dimensionnel lui même. Si U est le sous espace linéaire correspondant, on peut écrire $\pi(U)$ pour indiquer le sous espace projectif.

2.2 Engendrement (span) projectif

On suppose les $k+1$ vecteurs $\mathsf{p}_0, \ldots, \mathsf{p}_k$ linéairement indépendants. Ils engendrent un sous espace linéaire $k+1$ dimensionnel U. On dénote le sous espace projectif correspondant à ce sous espace linéaire avec le symbole

$$U = [\mathsf{p}_0, \ldots, \mathsf{p}_k] = P_0 \vee \ldots \vee P_k, \quad \text{où } \mathsf{p}_i\mathbb{R} = P_i$$

Ceci est appelé *engendrement projectif* de $P_0, \ldots, P_k$. Deux points projectivement indépendants engendrent une droite, et trois points projectivement indépendants engendrent un plan. U peut être paramétré par

$$\mathsf{x}\mathbb{R} = (\lambda_0 \mathsf{p}_0 + \ldots + \lambda_k \mathsf{p}_k)\mathbb{R} \tag{9}$$

avec $k+1$ paramètres homogènes $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$.

Les hyperplans peuvent être représentés alternativement par une équation linéaire

$$u_0 x_0 + \ldots + u_n x_n = \mathsf{u} \cdot \mathsf{x} = 0 \tag{10}$$

La $n+1$-tuple $(u_0 : \ldots : u_n)$ est appelée *coordonnée homogène de l'hyperplan*, et on dénote l'hyperplan avec vecteur coordonnée u par $\mathbb{R}\mathsf{u}$. La relation d'incidence est décrite par l'équation 10 : un point $\mathsf{x}\mathbb{R}$ et un hyperplan $\mathbb{R}\mathsf{u}$ sont incidents si et seulement si $\mathsf{u} \cdot \mathsf{x} = 0$.

Exemple 9. *On compute les coordonnées du plan engendré par les points* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *et* $(0,0,1)$ *de l'espace euclidien* E^3. *Après le plongement dans l'espace projectif* P^3, *ces trois points ont coordonnées* $\mathsf{x}_1\mathbb{R} = (1,1,0,0)\mathbb{R}$, $\mathsf{x}_2\mathbb{R} = (1,0,1,0)\mathbb{R}$ *et* $\mathsf{x}_3\mathbb{R} = (1,0,0,1)\mathbb{R}$. *Son engendrement* $\mathbb{R}\mathsf{u}$ *doit satisfaire* $\mathsf{u} \cdot \mathsf{x}_1 = \mathsf{u} \cdot \mathsf{x}_2 = \mathsf{u} \cdot \mathsf{x}_3 = 0$. *Ces sont trois équations linéaires homogènes pour les quatre composants inconnus de* u. *Dans ce cas, on peut voir, sans résoudre le système, que la solution est* $\mathbb{R}(-1,1,1,1)$.

2.3 Engendrement projectif et intersection de sous espaces

On supposera que U et V sont des sous espaces linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$. Ils définissent des sous espaces projectifs, aussi dénotés U et V. Le symbole $U \vee V$ dénote le plus petit sous espace (linéaire ou projectif) qui contient U et V. Avec $U \cap V$ on dénote sa intersection, qui est un autre sous espace (linéaire ou projectif). Le théorème suivant montre une relation entre les dimensions de ces sous espaces.

Théorème 10. *Soient* G *et* H *des sous espaces projectifs de l'espace projectif* n*-dimensionnel* P^n. *Alors*

$$\dim G + \dim H = \dim(G \cap H) + \dim(G \vee H) \tag{11}$$

Démonstration. On considère les sous espaces linéaires qui correspondent aux projectifs, et on dénote sa dimension avec $\dim_L$. Il est bien connu que $\dim_L G + \dim_L H = \dim_L(G \cap H) + \dim_L(G \vee H)$. Comme $\dim_L() = \dim() + 1$, le théorème est démontré. □

Si $G \cap H$ est vide et $G \vee H = P^n$, les sous espaces projectifs sont appelés *complémentaires*. L'équation 11 implique que, dans ce cas, $\dim G + \dim H = n - 1$.

Exemple 11. *Il y a deux possibilités pour les dimensions des sous espaces complémentaires dans le plan projectif. La possibilité triviale est le sous espace vide et l'espace complet, qui sont complémentaires. La possibilité non triviale est un point et une droite non incidente.*

Dans l'espace projectif on a, hormis le cas trivial, les cas d'une droite et un point non incident et de deux droites non concurrentes. Ces droites sont appelées obliques *(skew, en anglais).*

Si U_i est une famille de sous espaces, un utilise les symboles

$$V = \bigcap_{i \in I} U_i, \quad W = \bigvee_{i \in I} U_i$$

pour dénoter l'intersection V et l'engendrement W des sous espaces U_i. V consiste à tous les points contenus en tous les U_i ; il est un sous espace projectif. W est le plus petit sous espace qui contient tous les U_i.

2.4 Dualité dans l'espace projectif n-dimensionnel

Définition 12. *Si une affirmation sur des sous espaces k-dimensionnels, engendrement projectif, intersection et inclusion de sous espaces en P^n est modifiée en remplaçant ces items par sous espace $n-k-1$-dimensionnel, intersection, engendrement projectif et inclusion reverse de sous espaces, alors la nouvelle affirmation est appelée* duale *de l'affirmation originale.*

Trivialement, l'affirmation duale d'une affirmation duale donne l'originale. À chaque configuration de sous espaces (aussi appelée "figure géométrique"), on fait correspondre une configuration duale, en dualisant sa définition.

Théorème 13. *Une affirmation qui satisfait les critères de la définition 12 est vraie si et seulement si sa duale est vraie.*

La preuve de ce théorème échappe au contenu de cette introduction.

Exemple 14. *En P^3, les points sont duals aux plans, et les droites sont duales aux droites. Les points sur une droite sont duaux aux plans qui contiennent la droite (c'est à dire, un rang de points est dual à un faisceau de droites).*

Notez que dans l'espace euclidien E^n il n'y a pas de concept analogue à la dualité. C'est vrai que E^n est contenu en P^n, mais il n'est pas auto dual : il a plusieurs points idéaux, mais seulement un hyperplan.

2.5 Modèles de l'espace projectif

Quelques modèles du plan projectif peuvent être généralisés à l'espace projectif. Un bouquet de droites dans E^{n+1} est lui même un espace projectif n-dimensionnel. Aussi la sphère unitaire S^n avec des points antipodaux identifiés.

Références

[1] Harold Scott Macdonald Coxeter. *Geometry.* John Wiley & Sons, 1969.

[2] Daniel Lehman and Rudolphe Bkouche. *Initiation à la géométrie.* Presses universitaires de France, 1988.

[3] Helmut Pottmann and Johannes Wallner. *Computational line geometry.* Mathematics and Visualization. Berlin : Springer. ix, 563, 2001.

[4] Pierre Samuel. *Géométrie projective.* Presses universitaires de France, 1986.