Surfaces paramétriques

Luis Peñaranda

15 mars 2010

1 Définition

Un surface paramétrique est une surface de la forme

$$S(u,w) = \big(x(u,w), y(u,w), z(u,w)\big) \tag{1}$$

où $u, v \in [0,1]$.

Le choix de paramètres dans un intervalle définit un carré, dont les coins sont obtenus avec les valeurs 0 et 1 de u et v. On peut appeler P_{ij} avec $i, j \in \{0,1\}$ aux quatre coins du carré :

$$\begin{aligned} P_{00} &= S(0,0) \\ P_{01} &= S(0,1) \\ P_{10} &= S(1,0) \\ P_{11} &= S(1,1) \end{aligned}$$

Les quatre “arêtes” de ce carré peuvent être décrits par

$$\begin{aligned} P_{00}P_{01} &= S(0,w), & w &\in [0,1] \\ P_{01}P_{11} &= S(u,1), & u &\in [0,1] \\ P_{10}P_{11} &= S(1,w), & w &\in [0,1] \\ P_{00}P_{10} &= S(u,0), & u &\in [0,1] \end{aligned}$$

Lorsque on fixe un paramètre, on obtient une *courbe paramétrique*, par exemple, en fixant u_i et w_j on obtient les deux courbes

$$\begin{aligned} P_{i0}P_{i1} &= S(u_i,w), & w &\in [0,1] \\ P_{0j}P_{1j} &= S(u,w_j), & u &\in [0,1] \end{aligned}$$

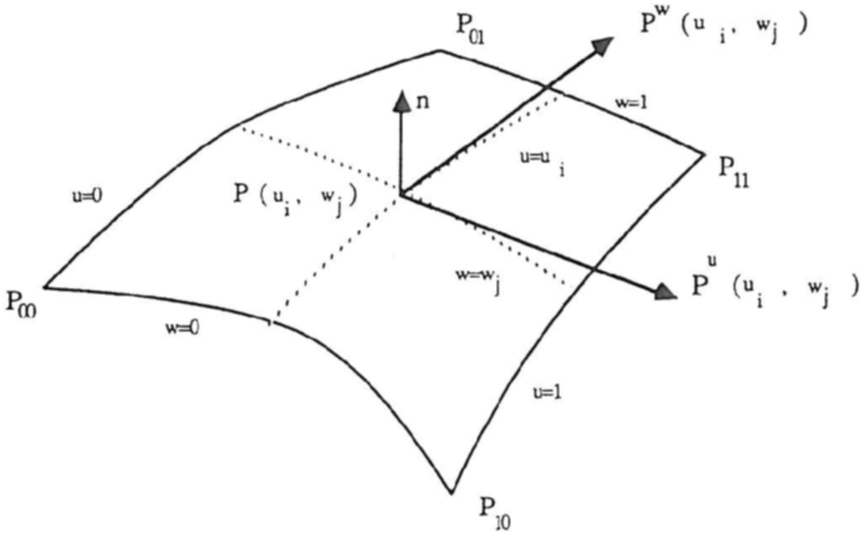

Figure 1 – Surface paramétrique

Trivialement, on peut aussi fixer u_i et w_j ensemble, pour obtenir le point :

$$P_{ij} = S(u_i, w_j)$$

Étant donné un point P_{ij}, on peut calculer les vecteurs tangents à la surface au point, en faisant :

$$P^u(u_i, w_j) = \frac{\partial S}{\partial u}(u_i, w_j) \tag{2}$$
$$P^w(u_i, w_j) = \frac{\partial S}{\partial w}(u_i, w_j) \tag{3}$$

En utilisant 2 et 3, on peut aussi déduire le vecteur normal en le point P_{ij} :

$$n(u_i, w_j) = \frac{P^u(u_i, w_j) \times P^w(u_i, w_j)}{\left|P^u(u_i, w_j) \times P^w(u_i, w_j)\right|} \tag{4}$$

La figure 1 illustre une surface paramétrique, ses coins P_{ij}, ses arêtes, un point sur elle et les tangentes et normale passant par ce point.

Dans la pratique, les fonctions x, y et z de l'équation 1 sont des fonctions polynomiales, par des différentes raisons :

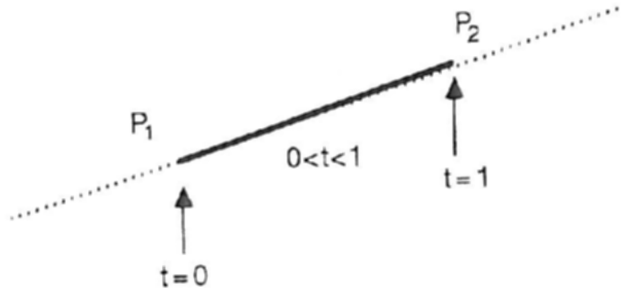

FIGURE 2 – Droite paramétrique

- elles permettent d'obtenir une approximation aussi précise que nécessaire d'une surface,
- les coefficients de ces fonctions polynomiales auront une interprétation géométrique simple, et
- elles permettent déterminer des points avec des produits simples.

La forme algébrique de cette surface paramétrique sera donnée alors par

$$S(u,w) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}u^i w^j \tag{5}$$

$$S(u,w) = [u^i]^T[a_{ij}][w^j] \tag{6}$$

Dans les systèmes de modélisation, les surfaces paramétriques sont normalement utilisées pour interpoler ou approcher un ensemble de points. Ces points sont généralement organisés sous une forme matricielle (on parle de treillis de points). La matrice $[a_{ij}]$ de l'équation 6 est une fonction de cette matrice de points et des contraintes d'interpolation.

On étudiera des surfaces bi-cubiques (c'est à dire, avec $m = n = 3$ dans l'équation 6.

2 Représentation paramétrique des courbes et des surfaces

Pour arriver à étudier les surfaces bi-cubiques, on commencera par considérer la paramétrisation d'un segment passant par deux points dans un espace n-

dimensionnel. Ensuite, on étudiera les courbes de degré supérieur et finalement on passera aux surfaces.

2.1 Segment de droite passant par deux points

L'équation du segment de droite passant par les points P_1 et P_2 sera

$$L_i(t) = (y_i - x_i)t + x_i \quad i = 1, \dots, n \text{ et } t \in [0, 1] \tag{7}$$

L_i est la i-ème composante d'un point sur le segment de la droite, paramétré par t comme dans la figure 2.

En fait, l'équation 7 peut être écrite de façon vectorielle en posant :

$$L(t) = \big(L_1(t), L_2(t), \dots, L_n(t)\big) \tag{8}$$

$$a = \big(y_1 - x_1, y_2 - x2, \dots, y_n - x_n\big) \tag{9}$$

$$b = \big(x_1, x_2, \dots, x_n\big) \tag{10}$$

$$L(t) = at + b \tag{11}$$

$L(t)$ dans l'équation 11 est une fonction vectorielle représentant n fonctions scalaires. Elle est un polynôme de degré 1 pour le paramètre t. De façon matricielle, $L(t)$ devient :

$$L(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = T_1 M_1 \tag{12}$$

Dans l'équation 12, T_1 est la matrice primitive d'un polynôme de base de degré 1 et M_1 est une matrice de 2 lignes et n colonnes.

Si on a des points du treillis P_1 et P_2, on aura besoin d'exprimer $L(t)$ en fonction de ces points. On note dans la figure 2 que $L(0) = P_1$ et $L(1) = P_2$. C'est à dire, $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} M_1$ et $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} M_1$, d'où

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} M_1 \tag{13}$$

Ce qui donne

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

On remplace 15 dans 12 pour obtenir finalement :

$$L(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

L'équation 16 montre le segment comme paramétrisation de ses deux extrémités. En généralisant cette méthode à des degrés de polynômes supérieurs, on exprime les équations des courbes en fonction de points particuliers.

2.2 Courbe paramétrique passant par trois points

On veut maintenant obtenir une courbe passant par trois points P_1, P_2 et P_3, de façon telle que

$$\begin{aligned} C(0) &= P_1 \\ C(0,5) &= P_2 \\ C(1) &= P_3 \end{aligned}$$

On sait que $C(t)$ est quadratique, alors

$$\begin{aligned} C(t) &= at^2 + bt + c \\ &= \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_2 \\ &= T_2 M_2 \end{aligned}$$

avec M_2 étant une matrice de taille 3x3. En remplaçant les valeurs précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M_2 & \text{car } t &= 0 \\ P_2 &= \begin{bmatrix} 0,25 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} M_2 & \text{car } t &= 0,5 \\ P_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} M_2 & \text{car } t &= 1 \end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} M_2$$

Alors, en inversant cette matrice 3x3 on obtient

$$M_2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

D'où on obtient l'expression finale

$$C(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

L'équation 17 est l'expression d'une courbe quadratique paramétrique passant par trois points donnés de façon telle que chaque point correspond aux paramètres $0, 0,5$ et 1. La matrice calculée est fixe et indépendante des trois points choisis.

2.3 Courbe cubique paramétrique

Ces courbes sont les courbes polynomiales de plus bas degré permettant à la fois de définir la position et la tangente de deux points. L'intervention de la tangente rend facile la connexion de différents segments de courbe.

L'équation sera alors

$$\begin{aligned} C(t) &= at^3 + bt^2 + ct + d \\ &= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_3 \\ &= T_3 M_3 \end{aligned}$$

M_3 est une matrice de taille 4x4. Elle est déterminée en spécifiant quatre vecteurs de contraintes dans l'équation précédente, de la même façon que pour les courbes quadratiques. La seule différence c'est qu'on peut faire intervenir à la fois les positions et les tangentes des points.

2.4 Surface bilinéaire paramétrique

Si on reprend le raisonnement de la section 2.1 et on remplace les positions fixes de P_1 et P_2 par des variables dépendant d'un paramètre u, on obtient l'équation d'une surface bilinéaire, comme dans la figure 3.

$$V(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(u) \\ P_2(u) \end{bmatrix}$$

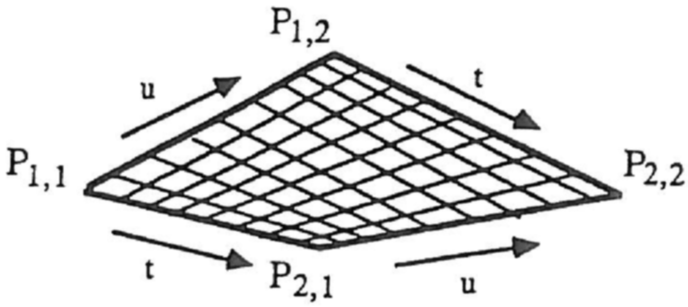

FIGURE 3 – Surface bilinéaire

Dans cette équation, $u, t \in [0,1]$. On pose à nouveau

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1(u) = \begin{bmatrix} u & 1 \end{bmatrix} M_1 \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix}$$

$$P_2(u) = \begin{bmatrix} u & 1 \end{bmatrix} M_1 \begin{bmatrix} P_{21} \\ P_{22} \end{bmatrix}$$

Les points P_{11}, P_{12}, P_{22} et P_{21} sont les quatre coins de la surface, qui résultent de fixer les valeurs de t et u à 0 ou 1. $P_1(u)$ et $P_2(u)$ sont des segments. Mélangeant tout, on obtient l'équation d'une surface bilinéaire :

$$V(t) = C(u,t) = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} M_1 \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} M_1^T \begin{bmatrix} u & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

2.5 Généralisation aux surfaces bicubiques

La procédure est exactement la même que dans les sections précédentes.

$$V(t,u) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_x G_{xx} M_x^T \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Dans l'équation 19, G_{xx} est une matrice de taille 4x4 contenant des points de contrôle ou des conditions de tangence. M_x est la matrice spécifique de chaque type de cubique (par exemple, Coons, Bézier ou Spline).

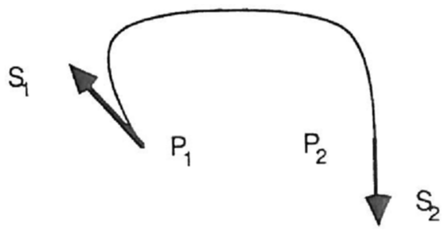

FIGURE 4 – Courbe de Coons

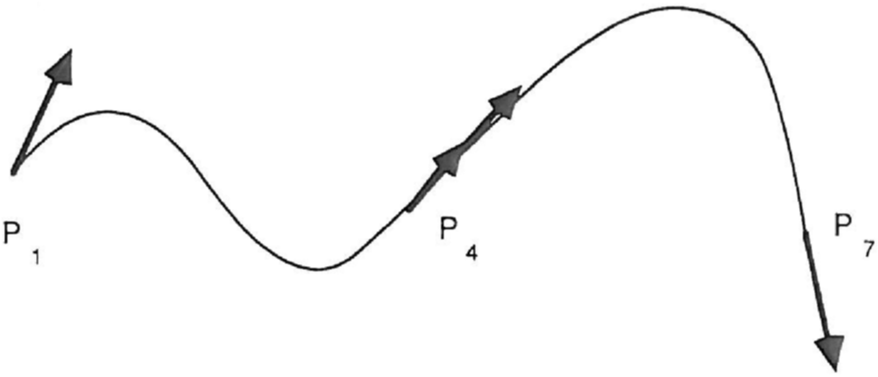

FIGURE 5 – Continuité entre deux courbes de Coons

3 Bases polynomiales

Dans les sections précédentes, on multipliait par des vecteurs de la forme $\left[t^i\right]_{i=0,\ldots,n}$ (matrices de base). Ces vecteurs représentent des polynômes en base *monomiale*. L'espace vectoriel des polynômes admet, néanmoins, plusieurs bases polynomiales. La seule restriction c'est que les polynômes de cette base doivent être linéairement indépendantes. Dans les sections suivantes, on verra des différentes bases, qui donnent lieu à la représentation de courbes avec des différentes propriétés.

3.1 Forme de Coons (intérpolation de Hermite)

La matrice d'une courbe de Coons sont la position de ses points extrêmes et les tangentes en ces points, comme montre la figure 4. Avec ces donnés, qu'on appellera dans la suite P_1, P_2, S_1 et S_2, on calcule la matrice de la façon suivante.

D'abord, on plonge les coordonnées des points extrêmes dans l'équation de la courbe :

$$C(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_3 \tag{20}$$

Les tangentes seront plongées dans la dérivé de la courbe, c'est à dire :

$$C'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} M_3 \tag{21}$$

Les conditions suivantes permettent d'évaluer M_3 :

$$\begin{aligned} C(0) &= P_1 \\ C(1) &= P_2 \\ C'(0) &= S_1 \\ C'(1) &= S_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_3$$

$$\begin{aligned} M_3 &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \\ &= M_h G_h \end{aligned}$$

Les tangentes nous permettent de relier des courbes entre différents points sans discontinuités. Pour obtenir, par exemple, la continuité de la figure 5, on utilisera les vecteurs $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ S_1 \\ S_4 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} P_4 \\ P_7 \\ kS_4 \\ S_7 \end{bmatrix}$.

On peut aussi obtenir des surfaces de Coons de la même manière. La forme géométrique d'une surface de Coons est

$$S(t,u) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_h G_{hh} M_h^T \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice G_{hh} de l'équation 3.1 est décomposée en quatre partitions : $G_{hh} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, où A contient les quatre coins du carré, B contient les dérivées de A par rapport à u, C contient ses dérivées par rapport à t et D contient la double dérivation de A par rapport à u et à t.

3.2 Forme de Bézier (base de Bernstein)

La forme de Bézier permet de prédire le comportement de la courbe sur la base du comportement de quatre *points de contrôle*. Cette représentation exprime les tangentes S_1 et S_2 de la forme de Hermite en terme des différences entre deux points. Toute l'information de la courbe est contenue alors dans ces quatre points de contrôle. Ces quatre points de contrôle sont liés à la représentation de Hermite par

$$\begin{aligned} P_1 &\leftarrow P_1 \\ P_2 &\leftarrow P_4 \\ S_1 &\leftarrow 3(P_2 - P_1) \\ S_2 &\leftarrow 3(P_4 - P_3) \end{aligned}$$

Ceci devient

$$\begin{aligned} G_h &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \\ &= M_{hb} G_b \end{aligned}$$

Ceci permet d'écrire une cubique de Bézier comme

$$C(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_b G_b \tag{22}$$

$$M_b = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$= M_h M_{hb} \tag{24}$$

La continuité d'ordre 1 entre deux courbes de Bézier définies par les vecteurs $\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{bmatrix}$ existe si les droites Q_3Q_4 et P_1P_2 sont colinéaires, avec $Q_4 = P_1$.

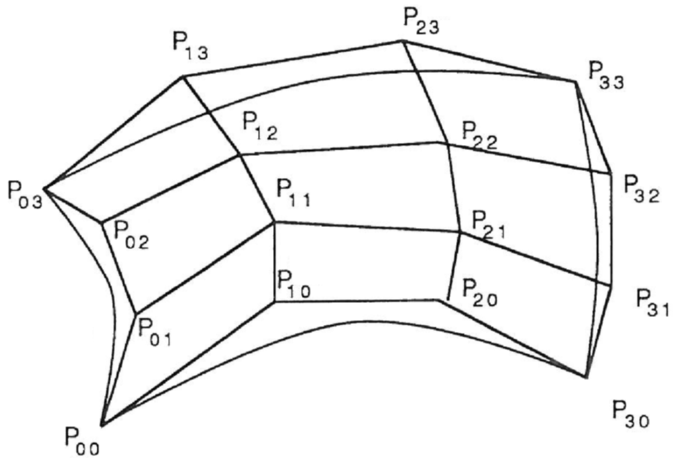

Figure 6 – Nappe bicubique de Bézier

Pour exprimer une surface (carreau) de Bézier bicubique, on raisonne de la même manière que pour exprimer une surface de Hermite :

$$S(t,u) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_b G_{bb} M_b^T \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Dans l'équation 25, la matrice G_{bb} contient les points de contrôle P_{ij} de la surface, comme illustré dans la figure 6.

3.3 Splines

Les splines permettent d'exprimer des continuités entre deux courbes sans avoir besoin de ses extrémités (comme dans le cas des formes de Hermite et de Bézier). Une spline est une courbe formée d'un ensemble de segments (ou une surface formée d'un ensemble de carreaux) liés implicitement avec une continuité d'ordre n. L'avantage de cette approche est qu'on peut modifier un point de contrôle sans perturber l'ensemble du modèle.

La représentation d'une courbe de Bézier, pour $n+1$ points, est

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(u) \qquad u \in [0,1] \tag{26}$$

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \tag{27}$$

Les polynômes $B_{i,n}$ de l'équation 27 sont les polynômes de Bernstein. Le nombre de points de contrôle détermine le degré de la fonction polynomiale de la forme de Bézier.

La courbe spline est donnée par l'équation

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i N_{ik}(u) \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
N_{i,1}(u) &= 1 && \text{si } t_i \leq u \leq t_{i+1} \\
N_{i,1}(u) &= 0 && \text{sinon} \\
N_{i,k}(u) &= \frac{(u-t_i)N_{i,k-1}}{t_{i+k-1}-t_i} + \frac{(t_{i+k}-u)N_{i+i,k-1}(u)}{t_{i+k}-t_{i+1}}
\end{aligned}$$

Les t_i sont des nœuds, qui relient la variable u aux points de contrôle. L'intervalle $[t_i, t_{i+k}]$ est appelé *support* de la spline. k contrôle le degré $k-1$ du polynôme résultant en n, ainsi que la continuité de la courbe. Le calcul itératif des $N_{i,k}$ se fait normalement suivant l'algorithme de *De Casteljau*, une méthode récursive pour évaluer des polynômes en base de Bernstein.

Le degré de la spline ne dépend pas du nombre des points de contrôle. Chaque morceau de courbe C_i est définie, pour $i = 1, \ldots, n-2$, par

$$C_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-1} \\ P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \end{bmatrix} \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{29}$$

La figure 7 montre deux splines, obtenues avec les mêmes points, pour $k = 3$ et $k = 4$.

Sources

Les figures ont été empruntées du chapitre II de [1].

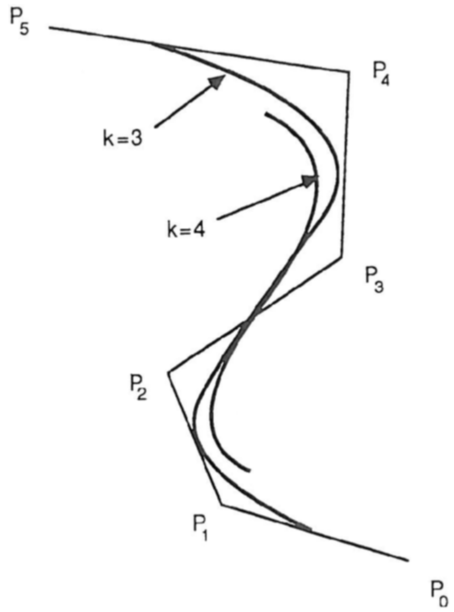

FIGURE 7 – Courbes splines

Références

[1] Gérard Hégron. La modélisation géométrique des scènes tridimentionelles. Notes du cours, juin 1989.

[2] Optimal Design Laboratory of Yuan-Ze University. Geometrical Modelling and Computer Graphics. Lecture Notes, 2000. http://designer.mech.yzu.edu.tw.