Subdivision de courbes et surfaces paramétriques

Luis Peñaranda

29 mars 2010

1 Introduction

La technique de subdivision de courbes et surfaces paramétriques est utile pour la visualisation et pour calculer des intersections. Cette méthode divise la courbe ou surface originale en deux autres morceaux, aussi exprimés en fonction d'un paramètre.

2 Subdivision d'une cubique

Une courbe paramétrique cubique est définie par un paramètre $t \in [0, 1]$ dans l'expression

$$C(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} MG \tag{1}$$

On désire subdiviser la courbe en deux morceaux, l'un pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et l'autre pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. On définira pour la première partie le paramètre $t_1 = 2t$, et avec t_1 on décrit l'expression du premier morceau de la courbe comme

$$\begin{aligned}
C_1(t_1) &= C\left(\frac{t_1}{2}\right) && (2)\\
&= \begin{bmatrix} t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MG && (3)\\
&= \begin{bmatrix} t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \end{bmatrix} S_1 MG && (4)\\
&= \begin{bmatrix} t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \end{bmatrix} MG_1 \qquad t_1 \in [0, 1] && (5)
\end{aligned}$$

En utilisant les équations 4 et 5, on obtient la *matrice de découpage* H_1.

$$G_1 = \left(M^{-1}S_1M\right)G = H_1G \tag{6}$$

La matrice de découpage permet d'obtenir la matrice géométrique de cette moitié de la courbe à partir de la matrice géométrique de la courbe originale. L'obtention de H_2, la matrice de découpage de la deuxième moitié de la courbe, est obtenue de façon completement analogue à H_1, en remplaçant t par $(t_2+1)/2$.

$$C_2(t_2) = C\left(\frac{t_2+1}{2}\right) \tag{7}$$

$$= \begin{bmatrix} t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \end{bmatrix} S_2MG \qquad\qquad t_2 \in [0,2] \tag{8}$$

$$S_2 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

H_2, la matrice de découpage de la seconde moitié de la courbe, est obtenue en regardant l'équation suivante :

$$G_2 = \left(M^{-1}S_2M\right)G = H_2G \tag{9}$$

Cette méthode de subdivision s'applique récursivement à la courbe, normalement jusqu'à ce qu'un certain critère soit atteint.

3 Subdivision des cubiques de Bézier

Si on applique la technique précédente à une cubique de Bézier, on obtient comme matrices de découpage :

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

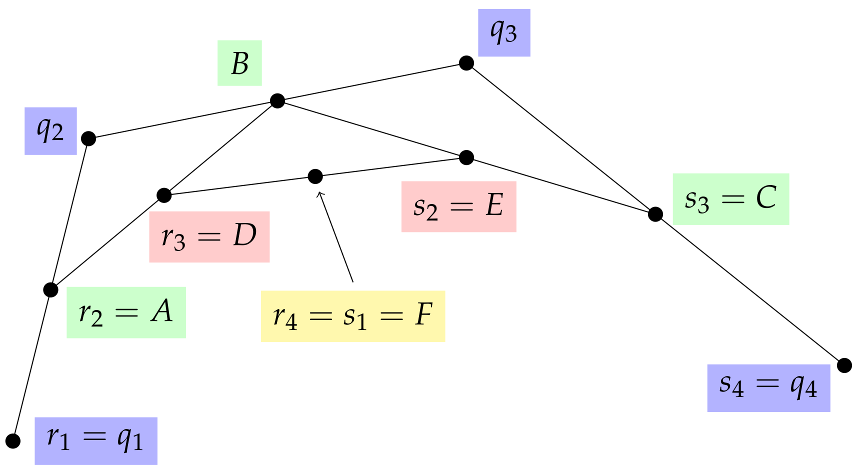

FIGURE 1 – Subdivision d'une cubique de Bézier.

Étant r_i les points de contrôle de la partie $C_1(t_1)$ et s_i ceux de la partie $C_2(t_2)$, on montre à partir de matrices de découpage que

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= q_0^i \\ s_{i+1} &= q_i^{n-1} \end{aligned}$$

où q_m^n est donné par la relation de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{rcl} q_m^{n+1} & = & \frac{q_m^n + q_{m+1}^n}{2} \\ q_j^0 & = & q_{j+1} \end{array} \right.$$

Le diagramme de la figure 2 montre comment peut-on structurer ce calcul récursif, à partir d'une courbe décrite par les points de contrôle q_i de la figure 1.

4 Subdivision d'une bicubique de Bézier

On applique un raisonnement analogue au précédent pour une surface. La surface bicubique de Bézier a deux paramètres, et la subdivision selon ces deux paramètres donne lieu à quatre carreaux. C'est à dire, la surface $S(u, v)$ avec u et v dans $[0, 1]$ sera subdivisée en $S_1(u', v')$, $S_2(u', v')$, $S_3(u', v')$ et $S_4(u', v')$, pour

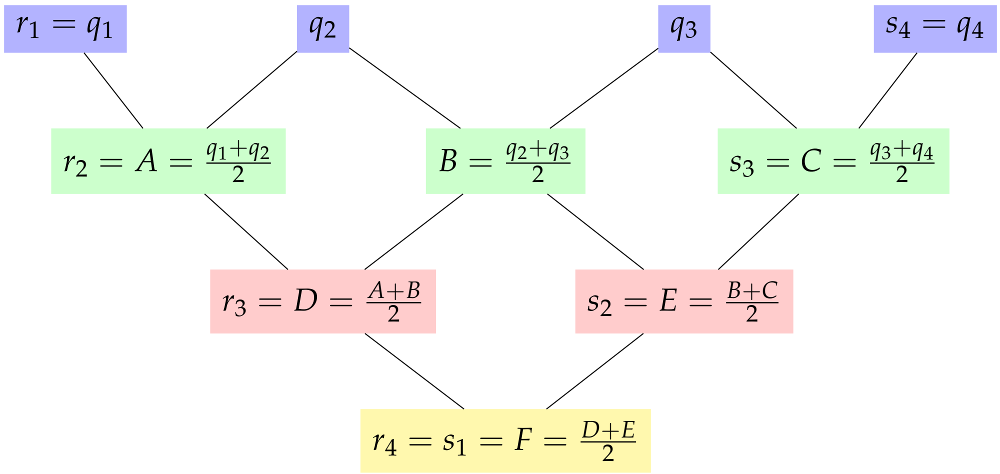

FIGURE 2 – Diagramme de calcul des points de la figure 1.

u' et v' dans $[0,1]$.

$$S_1(u',v') = S(u,v) \qquad u \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } v \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \tag{12}$$

$$S_2(u',v') = S(u,v) \qquad u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ et } v \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \tag{13}$$

$$S_3(u',v') = S(u,v) \qquad u \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } v \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \tag{14}$$

$$S_4(u',v') = S(u,v) \qquad u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ et } v \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \tag{15}$$

Si la matrice P contient les points de contrôle de S et P_i ceux de S_i (pour $i = 1, \ldots, 4$), on a

$$P_1 = H_1 P H_1^T \tag{16}$$

$$P_2 = H_2 P H_1^T \tag{17}$$

$$P_3 = H_1 P H_2^T \tag{18}$$

$$P_4 = H_2 P H_2^T \tag{19}$$

H_1 et H_2 sont les matrices de découpage, analogues à celles de la section précédente.

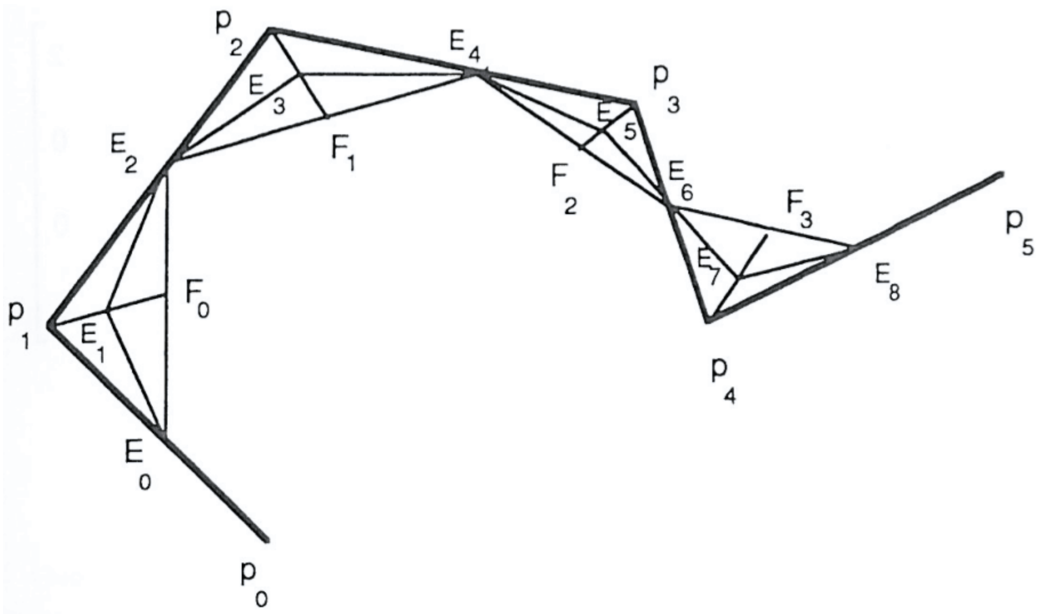

FIGURE 3 – Subdivision d'une spline cubique [1]

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

5 Subdivision des splines cubiques

On suppose une spline cubique interpolant les points de contrôle $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Les morceaux de courbe C_i sont ceux définis par les points $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$. On applique la méthode de la section 2 pour calculer les points de contrôle des B-splines T_{2i} et T_{2i+1} (les deux moitiés de C_i) à partir des points de contrôle de C_i, en les multipliant par H_1 pour T_{2i} et par H_2 pour T_{2i+1}.

Après la subdivision, on obtient les points de contrôle E_j pour $j = 0, \ldots, 2n - 3$. On calcule alors

$$E_{2i} = \frac{P_i + P_{i+1}}{2} \tag{22}$$

$$E_{2i+2} = \frac{F_{i+1} + P_{i+2}}{2} \tag{23}$$

$$F_i = \frac{E_{2i} + E_{2i+2}}{2} \tag{24}$$

$$E_{2i+1} = \frac{F_i + P_{i+1}}{2} \tag{25}$$

Cette procédure récursive est illustrée en la figure 3.

Références

[1] Gérard Hégron. La modélisation géométrique des scènes tridimentionelles. Notes du cours, juin 1989.

[2] Optimal Design Laboratory of Yuan-Ze University. Geometrical Modelling and Computer Graphics. Lecture Notes, 2000. `http://designer.mech.yzu.edu.tw`.