Cálculo Numérico **Nome** ______________________

Prof. Luis Peñaranda

Prova 1 – 2015.2 DRE ______________________

14/01/2016

Tempo máximo: 120 minutos

Esta prova contém 3 questões. Os pontos correspondentes a cada item estão especificados à esquerda do texto. O total de pontos de cada exercício está especificado depois do enunciado de cada exercício, à direita. O máximo de pontos possível na prova é 10. As respostas devem estar justificadas; a resposta correta sem justificação será desconsiderada.

---

[1] 1. (a) Que número é 431_6 em base 10?

[1] (b) Converter o número decimal 77 em binário.

[1½] (c) Representar o número 8.17 em virgula flutuante usando precisão dupla. Indique quais bits formam a mantissa, quais o exponente e quais o sinal.

[1] (d) Suponha um número n representado em base 7. Como fazer para multiplicar, de jeito rápido, n por 343_{10}?

Total questão 1: 4½ pontos

Gabarito:

(a) $431_6 = 4 \times 6^2 + 3 \times 6^1 + 1 \times 6^0 = 144 + 18 + 1 = 163_{10}$

(b)

$$\begin{aligned} 77/2 &= 38 \text{ resto } 1 \\ 38/2 &= 19 \text{ resto } 0 \\ 19/2 &= 9 \text{ resto } 1 \\ 9/2 &= 4 \text{ resto } 1 \\ 4/2 &= 2 \text{ resto } 0 \\ 2/2 &= 1 \text{ resto } 0 \\ 1/2 &= 0 \text{ resto } 1. \end{aligned}$$

Então, $77_{10} = 1001101_2$.

(c) Vamos primeiro separar o número em partes inteira e fracionária. A parte inteira de 8.17 é 8, que em binário é 1000. A parte fracionária é .17, devemos calcular como representá-la em binário. Para isso, multiplicamos sucessivamente por 2, e usamos como dígitos binários o primeiro dígito significativo dos produtos.

$$
\begin{aligned}
0.17 \times 2 &= 0.34\\
0.34 \times 2 &= 0.68\\
0.68 \times 2 &= 1.36\\
0.36 \times 2 &= 0.72\\
0.72 \times 2 &= 1.44\\
0.44 \times 2 &= 0.88\\
0.88 \times 2 &= 1.76\\
0.76 \times 2 &= 1.52\\
0.52 \times 2 &= 1.04\\
0.04 \times 2 &= 0.08\\
0.08 \times 2 &= 0.16\\
0.16 \times 2 &= 0.32
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
0.32 \times 2 &= 0.64\\
0.64 \times 2 &= 1.28\\
0.28 \times 2 &= 0.56\\
0.56 \times 2 &= 1.12\\
0.12 \times 2 &= 0.24\\
0.24 \times 2 &= 0.48\\
0.48 \times 2 &= 0.96\\
0.96 \times 2 &= 1.92\\
0.92 \times 2 &= 1.84\\
0.84 \times 2 &= 1.68\\
0.68 \times 2 &= \ldots
\end{aligned}
$$

Aqui notamos que, no próximo passo, deveríamos multiplicar 0.68 por dois. Porém, 0.68 já apareceu no processo, na terceira linha. Isso quer dizer que repetiríamos o processo indefinidamente. Ou seja, o número 0.17 em binário é periódico. A representação dele seria $0.00\overline{10101110000101000111}$, repetindo as últimas vinte cifras. Para representar o 8.17 em dupla precisão, devemos usar a representação do número inteiro 8 e do número fracionário 0.17. Ou seja, $1000.00\overline{10101110000101000111}$.

Já calculamos a representação binária do número. Agora temos que colocar em um registro de dupla precisão. Vamos calcular primeiro a mantissa, de 53 bits cujo primeiro bit é 1, seguido de uma vírgula. A mantissa seria então $1.00000\overline{10101110000101000111}$ (e repetindo os bits na dízima periódica até chegar aos 53 bits). A vírgula foi deslocada três lugares à esquerda, o que quer dizer que a mantissa obtida deve ser multiplicada por 2^3. Sendo 3 o exponente do número, temos que adicionar $2^{10} - 1$ ao 3, ou seja que os bits de exponente serão $3 + 1023 = 1026 = 10000000010_2$. Finalmente, o sinal de 8.17 é positivo, o que é representado como 0. O número 8.17 ficou então

$$\underbrace{0}_{\text{sinal}}\,\underbrace{10000000010}_{\text{exponente}}\,\underbrace{0000010101110000101000111101011100001010001111010111}_{\text{mantissa}}.$$

(d) Como $343 = 7^3$, multiplicar por 343 em base 7 é deslocar a vírgula 3 lugares para a direita. Se n for inteiro, é só colocar três zeros à direita de n.

$\boxed{1\frac{1}{2}}$ 2. (a) Temos um sistema de três equações com três variáveis. O sistema está bem definido e a matriz correspondente é não singular. Queremos resolver o sistema fazendo o menor número de passos. Para isso, temos duas opções: usar métodos diretos ou usar métodos indiretos. Em função de que parâmetro ou parâmetros faremos a escolha? (Justificar a resposta.)

2 (b) Queremos resolver o sistema usando um método indireto e, para isso, temos que estudar a convergência dos métodos. O critério das linhas é satisfeito, será que o critério de Sassenfeld é satisfeito também? (Justificar a resposta.)

Total questão 2: $3\frac{1}{2}$ pontos

Gabarito:

(a) Nas páginas 177 e 178 do livro de Ruggiero e Lopes, vários critérios de comparação entre métodos diretos e indiretos são dados. Baseado nesses três critérios, podemos responder essa pergunta.

- convergência: se os métodos indiretos não convergem, usar diretos.
- esparsidade: as considerações do livro não são aplicadas aqui; porém, uma matriz esparsa faz muito mais fácil resolver usando métodos diretos, usando o devido pivotamento.
- erros de arredondamento: os métodos de pivotamento fazem com que os erros de arredondamento desapareçam nos métodos diretos; portanto, esse ítem não tem interesse no nosso caso.

A esses três critérios, podemos agregar um quarto: a precisão, que é geralmente dada. Se quiser muita precisão, devemos fazer muitas iterações com métodos indiretos, então escolheremos um método direto. Se quiser pouca precisão, podemos fazer mais rápido algumas poucas iterações de um método indireto.

Uma resposta correta a essa questão seria enumerar os dois primeiros critérios do livro e a precisão desejada.

(b) Sim, o critério das linhas implica o critério de Sassenfeld. A prova, para matrizes de tamanho arbitrário, está na página 176 do livro de Ruggiero e Lopes. Essa prova pode ser feita mais simplesmente se considerarmos apenas matrizes 3×3.

3. Considere a matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & 9 & 0 \\ 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

1 (a) Fatorize A usando o método LU.

1 (b) Usando a fatoração LU da matriz, resolva o sistema $Ax = (3, 2, 1)^T$.

Total questão 3: 2 pontos

Gabarito:

(a) Como $a_{11} = 0$, será necessário fazer pivotamento parcial. Então, a matriz será fatorada como $PA = LU$, onde P é uma matriz de permutação, L é triangular inferior e U é triangular superior.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{15}{19} & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 0 & \frac{19}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{135}{19} \end{pmatrix}$$

Nota 1: A fatoração não é única, pode-se tentar usando outra matriz de permutação. Por exemplo,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{19}{5} & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

Nota 2: Nesse caso, $P = P^{-1}$, o que quer dizer que podemos escrever $PA = LU$ ou $A = PLU$. Na verdade, a fatoração LU da como resultado matrizes P, L e U tais que $PA = LU$ ou, igualmente, $A = P^{-1}LU$.

Nota 3: A fatoração LU da matriz A pode ser obtida em *Scilab* usando os comandos seguintes.

```
A=[0,5,5;2,9,0;6,8,8]
[L,U,P]=lu(A)
```

(b) Temos que resolver o sistema $Ax = b$, mas temos a fatoração da matriz PA. Então, vamos resolver o sistema $PA = Pb$. Aplicando a permutação dada por P, temos que $Pb = (1, 2, 3)^T$. Resolvemos então $Ly = Pb$, e temos $y = 1, \frac{5}{3}, \frac{52}{19})^T$. Finalmente, resolvemos o sistema $Ux = y$, para obter $x = (-\frac{19}{30}, \frac{49}{135}, \frac{32}{135})^T = (-0.6333, 0.3629, 0.2370)^T$.

Nota: O sistema pode ser resolvido em *Scilab* usando os comandos seguintes (assumindo que as matrizes P, L e U já foram calculadas).

```
y=linsolve(L,P*b)
x=linsolve(U,y)
```